PART2　和の法則と積の法則

2　［1］　$x+y \leqq 4$ を満たす正の整数 x，y の組はいくつあるか。

［2］　(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ の展開式における異なる項は何個あるか。

(2)　360 の正の約数の個数と，その総和を求めよ。

Point Pickup

［1］　和の法則

ある事柄が，同時に起こらない２つの事柄 A，B に分けられ，A の起こり方が a 通りあり，B の起こり方が b 通りあるとき，ある事柄が起こる，すなわち A，B のいずれかが起こる場合の数は $a+b$ 通りである。

［2］　積の法則

事柄 A の起こり方が a 通りあり，そのそれぞれに対して，事柄 B の起こり方が b 通りあるとき，A，B がともに起こる場合の数は $a \times b$ 通りである。

第 1 講　PART2　確認問題

1 $x+y \leqq 3$ を満たす 0 以上の整数 x, y の組はいくつあるか。

[アイ] 組

2 $(a+b+c)(d+e+f)(g+h+i+j+k)$ の展開式における異なる項は何個あるか。

[ウエ] 個

3 756 の正の約数の個数と，その総和を求めよ。

約数の個数 [オカ]

約数の総和 [キクケコ]

PART2　和の法則と積の法則

2　[1]　$x+y\leqq 4$ を満たす正の整数 x，y の組はいくつあるか。

[2]　(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ の展開式における異なる項は何個あるか。

(2)　360 の正の約数の個数と，その総和を求めよ。

[1]　$x+y\leqq 4$ を満たす正の整数 x，y の組は以下の 6 組。

$$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

(別解)

$x+y\leqq 4$ となるのは，次の(i)~(iii)の場合。

(i)　$x+y=2$　　(ii)　$x+y=3$　　(iii)　$x+y=4$

(i)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 1)$ の 1 通り

(ii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の 2 通り

(iii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ の 3 通り

(i)，(ii)，(iii)のどの 2 つも同時に起こらないから，求める組は　$1+2+3=6$(組)

[2]　(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ の展開式における項は

$(a, b$ のいずれか 1 つ$)\times(c, d, e$ のいずれか 1 つ$)\times(f, g, h, i$ のいずれか 1 つ$)$

の形である。よって，異なる項の個数は　$2\times3\times4=24$(個)

(2)　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$ より，360 の正の約数は

$(2^3$ の正の約数の 1 つ$)\times(3^2$ の正の約数の 1 つ$)\times(5$ の正の約数の 1 つ$)$

の形で表される。

2^3 の正の約数は $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$ の 4 個

3^2 の正の約数は $1,\ 3,\ 3^2$ の 3 個

5 の正の約数は 1，5 の 2 個

よって，正の約数の個数は　$4\times3\times2=24$ (個)

また，360 の正の約数 24 個は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)$$

を展開した項として現れる。よって，求める総和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\cdot13\cdot6=1170$$

第 1 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：10

[解説]

$x+y \leqq 3$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は

$(x,\ y)=(0,\ 0)，(0,\ 1)，(0,\ 2)，(0,\ 3)，$ [A]

$(1,\ 0)，(1,\ 1)，(1,\ 2)，$

$(2,\ 0)，(2,\ 1)，$

$(3,\ 0)$

の **10** 組

> [A]　小さい数からなど，規則正しく数え上げる。

（別解）

$x+y \leqq 3$ となるのは次の(i)～(iv)の場合である。

(i)　$x+y=0$　　(ii)　$x+y=1$

(iii)　$x+y=2$　　(iv)　$x+y=3$

(i)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ の 1 通り

(ii)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 1)，(1,\ 0)$ の 2 通り

(iii)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 2)，(1,\ 1)，(2,\ 0)$ の 3 通り

(iv)のとき

$(x,\ y)=(0,\ 3)，(1,\ 2)，(2,\ 1)，(3,\ 0)$

の 4 通り

(i)～(iv)のどの 2 つも同時に起こらないから，求める組は　$1+2+3+4=$ **10**（組）[B]

> [B]　和の法則
> 事柄 A，B が，同時には起こらないとする。A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りであるとき，A，B のいずれかが起こる場合の数は $a+b$ 通りである。

2 [正解] ウエ：45

[解説]

$(a+b+c)(d+e+f)(g+h+i+j+k)$ の展開式における項は

　$(a,\ b,\ c$ のいずれか 1 つ)
$\times$ $(d,\ e,\ f$ のいずれか 1 つ)
$\times$ $(g,\ h,\ i,\ j,\ k$ のいずれか 1 つ)

の形である。よって，異なる項の個数は

$3\times3\times5=$ **45**（個）[C]

> [C]　積の法則
> 事柄 A の起こり方が a 通りあり，そのそれぞれに対して，事柄 B の起こり方が b 通りであるとき，A，B がともに起こる場合の数は $a\times b$ 通りである。

3 [正解] オカ：24，キクケコ：2240

[解説]

$756=2^2\cdot3^3\cdot7$ より，756 の正の約数は

　(2^2 の正の約数の 1 つ)
$\times$ (3^3 の正の約数の 1 つ)
$\times$ (7 の正の約数の 1 つ)

の形で表される。

2^2 の正の約数は 1，2，2^2 の 3 個
3^3 の正の約数は 1，3，3^2，3^3 の 4 個
7 の正の約数は 1，7 の 2 個

よって，正の約数の個数は　$3\times4\times2=$ **24**（個）[D]

また，756 の正の約数 24 個は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+7)$$

を展開した項として現れる。よって，求める総和は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+7)$$ [D]

$=7\cdot40\cdot8=$ **2240**

> [D]　自然数 N が $N=p^aq^br^c\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は
> $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$
> 正の約数の総和は
> $(1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)\times(1+r+\cdots+r^c)\cdots\cdots$